JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 26, 79–100 (1979)

# Approximation des bornés d'un espace Banach par des compacts et applications à l'approximation des opérateurs bornés

H. FAKHOURY

*Département de Mathématiques, Université Claude-Bernard-Lyon 1, 43 bd du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne, France; and *Equipe d'Analyse, Département de Mathématiques Université de Paris VI, 2, place Jussieu, 75005 Paris, France*

*Communicated by E. W. Cheney*

Received December 5, 1977

We give geometrical characterization of Banach spaces $W$ such that every representable operator from $L^1(\mu)$ into $W$ admits a best approximation in the space of compact operators. This is the case if $W = l^1(\mathrm{I})$, $W = C(\Omega)$, or $W$ is a uniformely convex Banach space. In the dual situation we study the existence of best compact approximation for operators from a Banach space $V$ into $C(\Omega)$. Such approximations exist if $V$ is $l^p$, $1 < p < \infty$. We study also the existence of best approximation in the set of operators of a given finite dimensional range for representable operators from $L^1(\mu)$ into a Banach space $W$. The problem is solved when there is a norm one linear projection from $W''$ onto $W$. As to operators with values in $C(\Omega)$, it is proved that if $V = l^p$, $1 < p < \infty$, then every operator in $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ has a nearest point in $\mathscr{K}_n[V, C(\Omega)]$.

## INTRODUCTION ET NOTATIONS

La théorie de la meilleure approximation des opérateurs bornés par des opérateurs compacts s'est développée vers 1970 dans le cas des opérateurs définis sur un espace de Hilbert [7], [8]. Dans un cadre plus général [3], nous avons montré qu'il existe une projection (non linéaire) continue de meilleure approximation d'un espace de Banach $E$ sur un sous-espace $F$ dès qu'il existe une projection linéaire $Q$ du dual $E'$ de $E$ sur l'annulateur $F^\circ$ de $F$ qui vérifie:

$$\| e' \| = \| Q(e')\| + \| e' - Q(e')\|; \qquad \forall e' \in E'.$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que si $V$ est un espace de Hilbert alors l'espace des opérateurs compacts de $V$ dans lui-même est un tel sous-espace de l'espace des opérateurs bornés. De plus, d'après [8] c'est aussi le cas si $V$ parcourt une large classe d'espaces de Banach contenant les espaces $l^p$ pour $1 < p < \infty$ et $c_0(N)$.

* Adresse actuelle.



0021-9045/79/050079-22\$02.00/0

Notre but ici est d'étudier l'approximation des opérateurs bornés définis sur $V = L^1(\mu)$ à valeurs dans un espace de Banach $W$ par des opérateurs compacts ou bien par des opérateurs dont l'image a une dimension finie donnée.

Signalons quelques notations, si $V$ est un espace de Banach on note $B(V)$ sa boule unité fermée et $V'$ son dual. La boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$ est notée $B(x, r)$. Soient $V$ et $W$ deux espaces de Banach; on note $\mathscr{L}[V, W]$ (resp. $\mathscr{K}[V, W]$) l'espace des opérateurs bornés (resp. compacts) de $V$ dans $W$ muni de sa norme classique. Dans la suite $(X, \sum, \mu)$ sera un espace mesuré muni d'une tribu complète et d'une mesure positive. Si $V = L^1(\mu)$ on dira qu'un opérateur $T$ de $\mathscr{L}[V, W]$ est *représentable* s'il existe une fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$ telle que

$$T(f) = \int fg\, d\mu; \ \forall f \in L^1(\mu).$$

En particulier tout opérateur faiblement compact est représentable. Pour une fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$ on appelle image essentielle de $g$ le fermé $Bg$ de $W$ tel que pour tout $b$ de $Bg$ et pour tout $\epsilon > 0$ la mesure de l'ensemble $g^{-1}[B(b, \epsilon)]$ est strictement positive. Il est aisé de vérifier que $Bg$ ne dépend que de la classe d'équivalence $g$ et non du représentant choisi.

Dans la première partie nous montrons que tout opérateur représentable de $V = L^1(\mu)$ dans $W$ admet une meilleure approximation compacte dès que toute partie fermée bornée $B$ de $W$ possède la propriété géométrique suivante: il existe un compact $K_0$ de $W$ tel que

$$\sup\{d(x, K_0);\ x \in B\} \leqslant \sup\{d(x, K);\ x \in B\},$$

où $K$ parcourt l'ensemble des compacts de W. Parmi les espaces de Banach qui vérifient cette condition on a les espaces uniformément convexes, les espaces $l^1(I)$ et les espaces $C(\Omega)$.

Dans la deuxième partie nous étudions le problème dans la situation duale, c'est-à-dire l'approximation des opérateurs définis sur un espace de Banach V et à valeurs dans un espace $C(\Omega)$. En particulier, si $\Omega$ est un compact stonien et si $V'$ possède la propriété géométrique citée plus haut alors tout opérateur de $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$. D'autre part, si $V$ parcourt une classe d'espaces qui contient les espaces $l^p$ où $1 < p < \infty$, on a le résultat précédent pour tout compact $\Omega$.

Dans la dernière partie nous étudions le problème de l'approximation des opérateurs représentables définis sur $V = L^1(\mu)$ et à valeurs dans $W$ par des opérateurs de rang inférieur à un entier donné. En particulier si $W = L^1(\nu)$ ou bien si $W$ est un dual tout opérateur représentable de $\mathscr{L}[V, W]$ admet de tels approximations. En ce qui concerne les opérateurs à valeurs dans $C(\Omega)$ nous montrons que pour tout espace de Banach $V$ tout opérateur compact de

$V$ dans $C(\Omega)$ admet une meilleure approximation dans $\mathcal{K}_n[V, C(\Omega)]$ l'ensemble des opérateurs de rang inférieur à $n$. Si $\Omega$ est stonien le résultat est vrai pour tout opérateur de $V$ dans $C(\Omega)$; il en est de même si $V$ parcourt une classe d'espaces qui contient les espaces $l^p$, $1 < p < \infty$, et ceci pour tout compact $\Omega$.

## I. Approximation des Opérateurs Definis sur $L^1(\mu)$

Soient $W$ un espace de Banach et $B$ une partie bornée de $W$. Suivant Kuratowski on appelle *mesure de non compacité* de $B$ la quantité

$$\alpha[B, W] = \inf\{\lambda;\ \text{il esiste un recouvrement fini de } B \text{ par des boules de } W \text{ de rayon inférieur } \textit{à } \lambda\}.$$

Si aucune confusion n'est à craindre on notera $\alpha[B]$ cette quantité sans mention de l'espace considéré. Signalons toutefois que si $M$ est un sous-espace de $W$ on a pour toute partie bornée $B$ de $M$

$$\alpha[B, W] \leqslant \alpha[B, M] \leqslant 2\alpha[B, W].$$

Les propriétés suivantes qui expriment la croissance et la sous-additivité de la mesure de non compacité sont faciles à vérifier:

(1) $\alpha[B] = 0 \Leftrightarrow \bar{B}$ est compact.

(2) $\alpha[B] = \alpha[\bar{B}] = \alpha[\overline{\text{conv}}(B \cup -B)]$.

(3) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow \alpha[B_1] \leqslant \alpha[B_2]$.

(4) Si $K$ est relativement compact on a $\alpha[B \cup K] = \alpha[B + K]$.

(5) Si $K$ est relativement compact on *a*:

$$\text{Sup}[d(x, K);\ x \in B] \geqslant \alpha[B].$$

Cette dernière propriété amène la définition suivante:

Définition 1.1. Soient $B$ une partie bornée et $K_0$ un compact de $W$; on dira que $K_0$ réalise la meilleure approximation de $B$ si

$$\sup[d(x, K_0);\ x \in B] = \alpha[B].$$

La question est maintenant de savoir quels sont les espaces de Banach tels que toute partie bornée possède un compact de meilleure approximation.

Soient $V$ et $W$ deux espaces de Banach et $T$ un opérateur de $\mathscr{L}[V, W]$, la propriété (5) citée plus haut donne immédiatement

$$d[T, \mathscr{K}[V, W] \geqslant \alpha[T(B(V))].$$

On cherchera donc à répondre à la question posée plus haut en étudiant le problème de l'approximation des opérateurs continus par des opérateurs compacts.

Signalons pour être complet que la notion de mesure de non compacité est aussi utilisée dans [10] dans le but d'obtenir des propriétés de meilleure approximation d'opérateurs bornés par des opérateurs compacts.

PROPOSITION 1.2. *Soient $T$ un opérateur de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ qui est représenté par une fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$. Alors*

$$d[T, \mathscr{K}[V, W]] = \alpha[T(B(V))] = \alpha[Bg]$$

*où $Bg$ désigne l'image essentielle de la fonction $g$ dans l'espace $W$.*

*Démonstration.* On sait déjà que l'on a

$$d[T, \mathscr{K}[V, W]] \geqslant \alpha[T(B(V))].$$

De plus, on a les inclusions suivantes simples à vérifier:

$$\overline{\text{conv}}[Bg \cup -Bg] \subset \overline{T(B(V))} \subset \overline{\text{conv}}[g(X) \cup -g(X)]$$

où $X$ est l'ensemble mesuré sous-jacent à la définition de $L^1(\mu)$. Par conséquent, on a l'inégalité

$$\alpha[T(B(V))] \geqslant \alpha[Bg].$$

Il reste donc à prouver que

$$d[T, \mathscr{K}[V, W]] \leqslant \alpha[Bg] + \epsilon; \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Soient $b_1, \ldots, b_n$ les centres des boules de $W$ de rayon $\alpha[Bg] + \epsilon$ et dont la réunion recouvre l'ensemble $Bg$. Considérons la partition de $Bg$ définie par

$$\begin{cases} B_1 = \{b \in Bg; \| b - b_1 \| \leqslant d(b, \{b_1, \ldots, b_n\})\} \\ \cdots \\ B_n = \{b \in Bg; \| b - b_n \| \leqslant d(b; \{b_1, \ldots, b_n\})\} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i . \end{cases}$$

Soit $\varphi$ la surjection de $Bg$ sur l'ensemble $\{b_1, \ldots, b_n\}$ définie par

$$\varphi(b) = b_i ; \qquad b \in B_i , \qquad i = 1, \ldots, n.$$

L'application $h$ définie sur $X$ et à valeurs dans $W$ donnée par $h = \varphi \circ g$ est clairement dans $L^\infty(\mu, W)$; en fait c'est exactement la fonction simple définie par

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x)\, b_i$$

où $E_i = g^{-1}(B_i)$. Les ensembles $E_i$ sont $\mu$-mesurables puisque les ensembles $B_i$ sont tous boréliens. Soit $S_\epsilon$ l'opérateur de rang fini de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ qui est représenté par $h$; il est aisé de vérifier

$$\| T - S_\epsilon \| = \| g - h \|_\infty = \text{sup. ess.}\{\| g(x) - h(x)\|;\, x \in X\} \leqslant \alpha[Bg] + \epsilon$$

ce qui prouve l'inégalité recherchée et achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.3. *Soient $W_1$ un sous-espace fermé de $W$ et $T$ un opérateur représentable de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W_1]$. On suppose qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de $W$ sur $W_1$. Alors $d(T, \mathscr{K}[L^1(\mu), W_1]) = d(T, \mathscr{K}[L^1(\mu), W])$.*

La preuve est immédiate en utilisant la mesure de non compacité. Signalons que ce corollaire est tout à fait trivial, sans aucune hypothèse sur $V$ et sur $T$, si l'on suppose que la projection de $W$ sur $W_1$ est linéaire de norme 1. L'intérêt de ce corollaire réside donc dans le fait de pouvoir considérer des projections 1-lipschitziennes non linéaires.

Rappelons qu'une fonction multivoque $P$ définie sur un espace topologique $Y$ et à valeurs dans l'ensemble des parties non vides d'un espace topologique $Z$ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour tout fermé $F$ de $Z$ l'ensemble $\{y; P(y) \cap F \neq \phi\}$ est un fermé de $Y$. Le théorème de sélection de Kuratowski et Ryll-Nardzewski dont on se servira dans la suite est établi par exemple dans [Parthasarathy, Lecture Notes in Mathematics n° 263, page 49].

THÉORÈME 1.4. *Soit $T$ un opérateur de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ représentable par une fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'opérateur $T$ possède une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$.*

(b) *L'image essentielle $Bg$ de $g$ possède un compact de meilleure approximation.*

(c) *L'ensemble $T(B(V))$ possède un compact de meilleure approximation*

*Démonstration.* (a) $\Rightarrow$ (b) Soit $S$ un opérateur de $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$ qui réalise la meilleure approximation de $T$. L'opérateur $S$ étant compact est nécessairement représenté par une fonction $h$ de $L^\infty(\mu, W)$ dont l'image essentielle $B_h$ est compacte. Alors $B_h$ est un compact de meilleure approximation pour l'ensemble $Bg$. En effet, on a les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}\alpha[Bg] &\leqslant \sup\{d(b, B_h); b \in Bg\} \leqslant \text{sup. ess.}\{\| g(x) - h(x)\|; x \in X\}\\ &= \| g - h \|_\infty = \| T - S \| = \alpha[Bg].\end{aligned}$$

La dernière égalité étant la conséquence de la proposition 1.2.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soient $K$ un compact de $W$ qui réalise la meilleure approximation de $Bg$ et $P$ la projection de meilleure approximation de $W$ sur le compact $K$. Cette application prend ses valeurs dans l'ensemble des parties fermées non vide de $K$. De plus, il est facile de vérifier qu'elle est s.c.s. Le théorème de sélection de Kuratowski et Ryll–Nardzewski permet de construire une sélection borélienne que l'on notera $\varphi$. Soit $S$ l'opérateur de $V$ dans $W$ représenté par la fonction $\varphi \circ g$. Cet opérateur est compact puisque l'image essentielle de $\varphi \circ g$ est compacte. De plus, on a

$$\| T - S \| = \text{sup. ess.} \| g(x) - \varphi \circ g \|; x \in X = \alpha[Bg],$$

ce qui achève la démonstration compte tenu de la proposition 1.2.

(a) $\Rightarrow$ (c) Il s'agit de montrer que si $S$ est un opérateur de $\mathscr{K}[V, W]$ qui réalise la meilleure approximation de $T$ alors le compact $\overline{S(B(V))}$ réalise la meilleure approximation de $T(B(V))$. Pour la preuve on procède comme dans la démonstration de (a) $\Rightarrow$ (b); les vérifications sont laissées au lecteur.
(c) $\Rightarrow$ (b) On a déjà remarqué les inclusions suivantes:

$$\overline{\text{conv}}\, [Bg \cup -Bg] \subset \overline{T(B(V))} \subset \overline{\text{conv}}\, (g(X) \cup -g(X)).$$

Si $K$ est un compact de $W$ qui réalise la meilleure approximation de $\overline{T(B(V))}$ on a

$$\begin{aligned}\alpha[Bg] &\leqslant \sup\{d(b, K); b \in Bg\}\\ &\leqslant \sup\{d(w, K); w \in \overline{T(B(V))}\} = \alpha[T(B(V))] = \alpha[Bg]\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la proposition 1.2. Ceci montre bien que $K$ est un compact qui réalise la meilleure approximation de $Bg$.

COROLLAIRE 1.5. *Soient $W_1$ un sous-espace fermé de $W$ et $T$ un opérateur représentable de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W_1]$. On suppose qu'il existe une projection* 1-*lipschitzienne de $W$ sur $W_1$. Si $T$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$ il en admet une dans $\mathscr{K}[V, W_1]$.*

Comme dans le corollaire 1.3. l'intérêt de ce résultat consiste dans la possibilité de considérer des projections 1-lipschitziennes non linéaires.

Remarquons que si l'espace $W$ possède la propriété de Radon–Nikodym et si $\mu$ est une mesure bornée alors tout opérateur de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ est représentable. Ainsi les énoncés 1.2 et 1.4. donnent la distance de tout opérateur de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ à $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$ ainsi qu'une condition géométrique équivalente à l'existence d'une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$.

THÉORÈME 1.6. *Soit $W$ un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Toute partie fermée bornée (resp. séparable) possède un compact de meilleure approximation.*

(b) *Pour tout ensemble $I$, tout opérateur de $V = l^1(I)$ (resp. $V = l^1(\mathbb{N})$) dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, W]$.*

(c) *Pour toute mesure (resp. bornée) $\mu$ tout opérateur représentable de $L^1(\mu)$ dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$.*

*Démonstration.* L'implication (a) $\Rightarrow$ (c) est immédiate d'après les résultats précédents sachant que l'image essentielle de toute fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$ est séparable dès que $\mu$ est une mesure bornée. Reste à prouver (b) $\Rightarrow$ (a). Pour cela il suffit de montrer que toute partie séparable fermée bornée $B$ de $W$ est l'image essentielle d'une fonction $g$ de $l^\infty(\mathbb{N}, W)$. En effet, si l'on s'intéresse aux mesures non bornées il suffit de prendre $I = B$, pour $\Sigma$ la mesure discrète et pour $\mu$ la mesure de comptage. Soit donc $(b_n)$ une suite dense dans $B$; la fonction $g$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$g(n) = b_n\,; \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

est dans $l^\infty(\mathbb{N}, W)$ et répond à la question.

Si l'on s'intéresse aux mesures bornées, les assertions du théorème précédent peuvent être complétées par le résultat suivant:

THÉORÈME 1.7. *Soit $W$ un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Toute partie fermée bornée séparable de $W$ possède un compact de meilleure approximation.*

(b) *Il existe une mesure bornée $\mu$ telle que $L^1(\mu)$ est de dimension infinie et telle que tout opérateur représentable de $L^1(\mu)$ dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$.*

*Démonstration.* Il s'agit uniquement de montrer (b) $\Rightarrow$ (a). Supposons que possède une infinité d'atomes $(x_n)$ et soit $(b_n)$ une suite dense dans $B$. La fonction $g$ définie sur $X$ par

$$g(x) = \begin{cases} b_n \text{ si } x = x_n\,;\ \forall n \in \mathbb{N}; \\ 0 \quad \text{si } x \notin \{x_n\}. \end{cases}$$

est dans $L^\infty(\mu, W)$ et répond à la question. Si la mesure $\mu$ ne possède qu'un nombre fini d'atomes, comme $L^1(\mu)$ est de dimension infinie, la mesure $\mu$ possède une partie diffuse non nulle. Soient $x_1, \dots, x_N$ les atomes de $\mu$ et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $X\backslash(x_1, \dots, x_N)$ formée d'ensembles $\mu$-mesurables telles que

$$X\backslash\{x_1, \dots, x_N\} = \bigcup_n E_n \ ; \mu.p.p.;$$

$$\mu(E_i \cap E_j) = 0; \ \forall\, i \neq j.$$

Une telle suite existe justement puisque $\mu$ est une mesure bornée. On pose $g$ la fonction définie sur $X$ par

$$g(n) = \begin{cases} b_i & \text{si } x = x_i \ ; \ i = 1, \dots, N; \\ b_{i+N} & \text{si } x \in E_i \ ; \\ 0 & \text{si } x \in X \Big\backslash \left[\{x_1, \dots, x_n\} \cup \left(\bigcup_n E_n\right)\right]. \end{cases}$$

La fonction $g$ est dans $L^\infty(\mu, W)$ comme le montre une vérification immédiate et l'image essentielle de $g$ coïncide avec $B$, ce qui achève la preuve du théorème compte tenu du théorème 1.4.

Le problème est maintenant de déterminer les espaces de Banach qui vérifient les propriétés équivalentes des théorèmes 1.6 ou 1.7. Nous en connaissons trois types. Si $\Omega$ est un compact $C(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\Omega$ muni de sa norme habituelle.

THÉORÈME 1.8. *Soit $T$ un opérateur de $L^1(\mu)$ dans un espace de Banach $W$; alors $T$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$ sous les hypothèses suivantes:*

(i) *$W$ est uniformément convexe,*

(ii) *L'opérateur $T$ est représentable et $W$ est un sous-espace de $C(\Omega)$ tel qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de $C(\Omega)$ sur $W$.*

(iii) *La mesure $\mu$ est bornée et $W$ est un sous-espace de $l^1(I)$ tel qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de $l^1(I)$ sur $W$.*

*Démonstration.* (i) Il est prouvé dans [10] que toute partie bornée dans un espace uniformément convexe possède un compact de meilleure approximation; d'où le résultat puisque tout opérateur de $L^1(\mu)$ dans $W$ est représentable.

(ii) Il est prouvé dans [4] que tout opérateur représentable ou pas de $L^1(\mu)$ dans $C(\Omega)$ possède une meilleure approximation compacte. D'où le résultat compte tenu du corollaire 1.5.

(iii) Tout sous-espace séparable de $l^1(I)$ est inclus dans un sous-espace isométrique à $l^1(\mathbb{N})$. Il suffit donc compte tenu de l'assertion (a) du théorème 1.7. de prouver que tout opérateur de $l^1(\mathbb{N})$ dans lui-même admet une meilleure approximation compacte; résultat qui est prouvé dans [10]. On conclut grâce au corollaire 1.5. sachant que tout opérateur de $L^1(\mu)$ dans $l^1(I)$ est représentable.

La classe des espaces de Banach $W$ qui vérifient la condition (ii) du théorème contient les espaces $C_0(Y)$ formés des fonctions continues sur un espace localement compact $Y$ et nulles *à* l'infini. Plus généralement, cette classe contient les $C_\sigma$-espaces, c'est-à-dire les espaces de Banach isométriques à un espace de fonctions continues sur un compact $\Omega$ muni d'une homéomorphie involutive $\sigma$ et vérifiant $f(\sigma(\omega)) = -f(\omega)$ pour tout $\omega$ de $\Omega$. D'autre part, si $W$ vérifie la condition (ii) alors $W'$ est isométrique à un espace $L^1(\mu)$; cependant, l'on ignore si la réciproque est vraie. En tous cas, il est maintenant clair que toute partie fermée bornée d'un $C_\sigma$-espace ou bien de $l^1(\mathbb{N})$ possède un compact de meilleure approximation.

Soit $T$ un opérateur de $\mathscr{L}[V, W]$, on note $\mathscr{K}(T)$ le convexe, éventuellement vide, des opérateurs de $\mathscr{K}[V, W]$ qui réalisent la meilleure approximation de $T$. Les propriétés de la meilleure approximation des éléments de $\mathscr{L}[V, W]$ par des éléments de $\mathscr{K}[V, W]$ s'obtiennent à partir de la connaissance de $\mathscr{K}(T)$ pour tout $T$ de $\mathscr{L}[V, W]$ ainsi que de la connaissance de l'ensemble

$$\{T \in \mathscr{L}[V, W]; \mathscr{K}(T) \ni 0].$$

Nous avons vu dans [4] que ce dernier ensemble est toujours d'intérieur vide. Le résultat suivant généralise un énoncé de [4] établi pour $V = l^1(\mathbb{N})$. Un résultat de densité analogue au suivant est prouvé dans le cas de l'approximation des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert dans lui-même par des opérateurs compacts par C. L. Olsen (voir référence dans [4]).

THÉORÈME 1.9. *Soient $\mu$ une mesure bornée et $T$ un opérateur représentable de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$. L'opérateur $T$ est adhérent pour la topologie forte (resp. faible) d'opérateurs à $\mathscr{K}(T)$ dès que ce dernier n'est pas vide. Par conséquent $\mathscr{K}(T)$ n'est compact pour aucune des topologies naturelles sur $\mathscr{K}[L^1(\mu), W]$ dès qu'il n'est pas vide et que $T$ n'est pas compact.*

*Démonstration.* Supposons l'ensemble $\mathscr{K}(T)$ non vide et l'opérateur $T$ non compact, sinon il n'y a rien à prouver. D'après le théorème 1.4. l'ensemble $Bg$, image essentielle de la fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$ qui représente $T$, admet un compact $K_0$ qui réalise sa meilleure approximation. Comme $Bg$ est séparable, puisque $\mu$ est bornée, on choisit une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $Bg$. Soit $\tilde{T}$ l'opérateur de $l^1(\mathbb{N})$ dans $W$ défini par

$$\tilde{T}(\lambda_n) = \Sigma\lambda_n b_n\,; \qquad \forall(\lambda_n) \in l^1(\mathbb{N}).$$

L'opérateur $\tilde{T}$ admet une meilleure approximation $\tilde{S}$ dans $\mathcal{K}[l^1(\mathbb{N}), W]$ d'après le théorème 1.4. L'opérateur $\tilde{T}$ n'est pas compact dès que $T$ ne l'est pas et dans ce cas $\tilde{T}$ ne coïncide pas avec $\tilde{S}$. Soit $P_n$ la projection de $l^1(\mathbb{N})$ sur l'espace engendré par les $n$ premiers vecteurs de la base canonique; on pose

$$\tilde{S}_n = \tilde{T}P_n + \tilde{S}(I - P_n).$$

C'est une suite d'opérateurs compacts qui converge pour la topologie forte d'opérateurs vers $\tilde{T}$. De plus, on a

$$\| \tilde{T} - \tilde{S}_n \| = \|(\tilde{T} - \tilde{S})(I - P_n)\| \leqslant \| \tilde{T} - \tilde{S} \|$$

ce qui montre que les $\tilde{S}_n$ sont dans $\mathcal{K}(\tilde{T})$. Chaque opérateur $\tilde{S}_n$ est canoniquement associé d'après le théorème 1.4., à un compact $K_n$ qui réalise la meilleure approximation de $Bg$. On peut en fait poser $K_n = \overline{\operatorname{conv}}\{\tilde{S}_n(e_p); p \in \mathbb{N}\}$ où $(e_p)$ est la base canonique de $l^1(\mathbb{N})$. D'après la construction de $\tilde{S}_n$ on a

$$\tilde{S}_n(e_p) = \begin{cases} \tilde{T}(e_p) = b_p \,; & p \leqslant n; \\ \tilde{S}(e_p); & p > n. \end{cases}$$

Par conséquent, on a l'inclusion suivante

$$Bg \subset \overline{\bigcup_n K_n}\,. \tag{*}$$

Si $g_n$ est la fonction de $L^\infty(\mu, W)$ à image essentielle dans $K_n$ construite dans le Théorème 1.4. et qui représente un opérateur compact $S_n$ qui réalise la meilleure approximation de $T$, on a d'après l'inclusion (*) et la construction du théorème 1.4.

$$\lim_n \| g(x) - g_n(x)\|_\infty = 0.$$

Le théorème de convergence dominée montre que pour toute fonction simple $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i} a_i$ on a

$$\lim_n \| S_n(f) - T(f)\| = 0.$$

On conclut que la suite $S_n$ converge vers $T$ pour la topologie forte d'opérateurs d'après le théorème de Banach–Steinhauss.

Le fait que $\mathcal{K}(T)$ n'est pas compact pour la topologie forte est maintenant évident. Ceci montre que $\mathcal{K}(T)$ n'est pas compact pour la topologie de la norme qui est plus fine. Le fait que $T$ est adhérent à $\mathcal{K}(T)$ pour la topologie faible est conséquence de ce qui précède puisque cette topologie est moins fine que celle de la convergence forte d'opérateurs. De là on déduit que $\mathcal{K}(T)$ n'est pas compact pour la topologie faible d'opérateurs.

Signalons que l'hypothèse affirmant que $T$ est un opérateur représentable est nécessaire pour le résultat précédent. En effet, il est possible de montrer que l'identité de $L^1([0, 1])$ ne vérifie pas la conclusion du théorème [voir [5]].

## II. Approximation des Opérateurs a Valeurs dans $C(\Omega)$

Il s'agit de rechercher dans cette partie des résultats concernant l'approximation des opérateurs *à* valeurs dans un espace $C(\Omega)$. Si $V$ et $W$ sont deux espaces de Banach, il est clair que pour tout opérateur $T$ de $\mathscr{L}[V, W]$ on a

$$d(T', \mathscr{K}[W', V']) \leqslant d(T, \mathscr{K}[V, W]).$$

Cependant, si $W$ est réflexif alors tout opérateur de $\mathscr{L}[W', V']$ est le transposé d'un opérateur de $\mathscr{L}[V, W]$. Il est maintenant aisé de vérifier que si $W$ est réflexif un opérateur de $\mathscr{L}[W', V']$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[W', V']$ si et seulement s'il est le transposé d'un opérateur de $\mathscr{L}[V, W]$ qui admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, W]$. Ainsi, si $W$ est uniformément lisse et $\Omega$ est un compact hyperstonien (i.e. $C(\Omega)$ est un espace dual) le Théorème 1.8 (i) implique que tout opérateur de $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$. Ce résultat sera renforcé dans la proposition suivante:

Proposition 2.1. *Soient $\Omega$ un compact et $V$ un espace de Banach tel que toute partie bornèe de $V'$ admet un compact de meilleure approximation. Pour tout opérateur $T$ de $\mathscr{L}(V, C(\Omega)]$ il existe un opérateur compact $S$ de $V$ dans l'espace $B(\Omega)$ des fonctions bornées sur $\Omega$ tel que*

$$\| T - S \| \leqslant d(T, \mathscr{K}[V, C(\Omega)]).$$

*Si $\Omega$ est un compact stonien il existe une meilleure approximation de $T$ dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi$ l'application de $\Omega$ dans $V'$ qui est canoniquement associée à l'opérateur $T$. L'hypothèse sur $V'$ implique l'existence d'un compact $K$ qui réalise la meilleure approximation de $\varphi(\Omega)$. De plus, la remarque précédente et la proposition 1.2. montrent que

$$d(T, \mathscr{K}[V, C(\Omega)] \geqslant \alpha\, [\varphi(\Omega)].$$

Soit $P$ la projection de meilleure approximation de $V'$ sur $K$; comme ce dernier est compact, cette application prend ses valeurs dans l'ensemble des parties fermées non vide de $K$. Par un raisonnement de compacité on peut vérifier que $P$ est s.c.s. D'après le théorème de Kuratowski et Ryll-Nardzewski il existe une sélection borélienne $\theta$ de cette application. Soit $S$ l'opérateur de $V$ dans $B(\Omega)$ défini par

$$S(v) = \theta_0 \varphi(\omega)(v); \qquad \forall v \in V; \qquad \omega \in \Omega.$$

Cet opérateur est compact puisque l'image de $\Omega$ par $\theta_0\varphi$ est incluse dans une partie normiquement compacte de $V'$ à savoir $K$. De plus, on a

$$\| T - S \| = \alpha[\varphi(\Omega)] \leqslant d(T, \mathscr{K}[V, C(\Omega)]).$$

Si $\Omega$ est un compact stonien, il existe une projection linéaire $Q$ de norme 1 de $B(\Omega)$ sur $C(\Omega)$; l'opérateur $Q_0 S$ de $V$ dans $C(\Omega)$ réalise la meilleure approximation de $T$ dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$.

*Remarque.* Si tout borélien pour la norme de $V'$ est un borélien pour la structure induite par la topologie $\sigma(V', V)$ la construction précédente montre que l'opérateur $S$ prend ses valeurs dans $Bor(\Omega)$ l'espace des fonctions boréliennes sur $\Omega$. Cette situation se présente, par exemple d'après [2] dans le cas où l'espace $V'$ possède la propriété (**) définie par:

> Les topologies de la norme et $\sigma(V', V)$ coïncident sur la sphère unité de l'espace $V'$, (**)

ou plus généralement si les structures boréliennes induites par la norme et par $\sigma(V', V)$ coïncident sur la sphère unité de $V'$.

C'est en particulier le cas si l'espace $V'$ est uniformément convexe ou bien $V = C_0(\mathbb{N})$ puisque dans ces deux cas $V'$ vérifie l'hypothèse de la proposition ainsi que la condition (**). Si $V'$ est uniformément convexe on a même mieux:

THÉORÈME 2.2. *Soient $\Omega$ un compact et $V$ un espace de Banach uniformément lisse (i.e. $V'$ uniformément convexe). Pour tout opérateur $T$ de $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ il existe une partie $Z$ de $\Omega$ qui est un $G_\delta$ dense et un opérateur compact $S$ de $V$ dans $Bor(\Omega)$ tels que*

(1) $\| T - S \| \leqslant d(T, \mathscr{K}[V, C(\Omega)])$.

(2) *Pour tout $v$ de $V$ la fonction $S(v)$ est continue en tout point de $Z$.*

*Démonstration.* Soit $\varphi$ l'application de $\Omega$ dans $V'$ canoniquement associée à l'opérateur $T$. D'après le théorème 1.8. il existe un compact $K$ qui réalise la meilleure approximation de $\varphi(\Omega)$. Soient $K_0 = \overline{\text{conv}}(K)$ et $P$ la projection de meilleure approximation de $V'$ sur $K_0$. Pour tout $v'$ l'ensemble $P(v')$ est réduit à un point à cause de la stricte convexité de $V'$. De plus, l'application $P$ est continue d'après le Lemme 2.3. dont la preuve est implicitement donnée dans [12]. D'après [11] il existe une partie $Z$ de $\Omega$ qui est un $G_\delta$ dense telle que l'application $\varphi$ de $\Omega$ dans $V'$ muni de sa norme est continue en tout point de $Z$. L'opérateur $S$ défini sur $V$ par

$$S(v)(\omega) = P_0\varphi(\omega)(v); \qquad \forall v \in V; \qquad \omega \in \Omega;$$

prend ses valeurs a priori dans $B(\Omega)$. Pour tout $v$ la fonction $S(v)$ est continue en tout point de $Z$. Pour montrer que $S(v)$ est borélienne on utilise la remarque précédent ce théorème; en effet $V'$ étant uniformément convexe les topologies de la norme et $\sigma(V', V)$ coïncident sur la sphère unité de $V'$. Un espace de Banach $E$ est dit localement uniformément convexe si $\| e_n \| = 1 = \| e \|$ et $\| e_n + e \| \to 2$ impliquent $\| e_n - e \| \to 0$. Si $E$ possède cette propriété il est aisé de vérifier que pour toute suite $(e_n)$ qui converge faiblement vers $e$ et telle que $\| e_n \| \to \| e \|$ on a $\| e_n - e \| \to 0$. Un espace de Banach uniformément convexe vérifie évidemment les conditions précédentes.

LEMME 2.3. *Soit $K_0$ un convexe fermé dans un espace de Banach $E$ qui est localement uniformément convexe. On suppose que l'intersection de $K$ avec toute boule fermée de $E$ est $\sigma(E, E')$ compacte. Alors la projection de meilleure approximation de $E$ sur $K_0$ est continue.*

Comme le montre un examen des preuves précédentes, l'opérateur $S$ construit plus haut sera dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$ dès que la projection $P$ de $V'$ sur $K_0$ sera continue pour $\sigma(V', V)$ sur les parties bornées de $V'$. C'est évidemment le cas si $V$ est un espace de Hilbert. D'ailleurs c'est la preuve de ce résultat qui nous guide dans la formulation de l'assertion suivante. Rappelons que si $E$ est un espace de Banach lisse on pose pour tout $e$ de $E\backslash\{0\}$

$$G(e, e') = \lim_{t \mapsto 0_+} \frac{\| e + te' \| - \| e \|}{t}\ ; \forall e' \in E;$$

où $G(e, e')$ est la dérivée de la norme au point $e$ et dans la direction $e'$. Il est connu que $G(e, \cdot)$ est une fonctionnelle de la sphère unité de $E'$. Dans le théorème suivant on considère les espaces de Banach $V$ unformément lisse et strictement convexe tels que l'application $v' \mapsto G(v', \cdot)$ est continue sur les bornés de $V'$ pour les topologies faibles de $V'$ et de $V$. Cette classe n'est pas vide puisqu'elle contient les espaces $l^p$, $1 < p < \infty$, d'après [1], cependant elle ne contient aucun des espaces $L^p([0, 1])$; $p \in ]1, 2[\cup]2, \infty[$.

THÉORÈME 2.4. *Soient $\Omega$ un compact et $V$ un espace de Banach uniformément lisse et strictement convexe. On suppose que l'application $v' \mapsto G(v', \cdot)$ est continue sur les bornés de $V'$ pour les topologies faibles de $V'$ et de $V$. Tout opérateur de $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, C(\Omega)]$.*

*Démonstration.* Comme $V'$ est uniformément convexe il suffit pour établir le théorème de montrer, compte tenu des remarques précédentes, que la projection de meilleure approximation sur tout convexe compact est continue sur les bornés de $V'$ pour la topologie $\sigma(V', V)$. L'hypothèse sur $V$ implique que $V'$ est lisse, ainsi l'application $v' \mapsto G(v', \cdot)$ est bien définie. Soit $(v'_\alpha)$ une famille ultrafiltrée bornée dans $V'$ qui converge faiblement vers un point $v$. Le point $P(v'_\alpha)$ de $K$ qui réalise la meilleure approximation de $v'_\alpha$ est caractérisé par le fait qu'il existe $v_\alpha$ dans $V$ tel que

(i) $\| v_\alpha \| = 1$;

(ii) $v_\alpha(v'_\alpha - P(v'_\alpha)) = \| v'_\alpha - P(v'_\alpha)\|$;

(iii) $v_\alpha(P(v'_\alpha) - k) \geqslant 0; \qquad \forall k \in K.$

Ceci provient du théorème de séparation de Hahn–Banach appliqué au convexe $K$ et *à* la boule ouverte de centre $v'_\alpha$ et de rayon $d(v'_\alpha, K)$. Le point $v_\alpha$ est l'unique élément de la sphère unité de $V$ qui vérifie (ii) puisque $V'$ est lisse. Il coïncide donc avec $G(v'_\alpha - P(v'_\alpha), \cdot) = v_\alpha$.

Comme $K$ est compact la famille $(P(v'_\alpha))$ converge pour la norme vers un point $l$ de $K$. L'hypothèse montre que la famille $(v_\alpha)$ converge faiblement vers $v = G(v' - l, \cdot)$. Comme $(v_\alpha)$ converge faiblement vers $v$ et $(P(v'_\alpha))$ converge pour la norme vers $l$ on a

$$\begin{aligned} | v_\alpha(P(v')) - v(l)| &\leqslant | v_\alpha(P(v') - l)| + |(v_\alpha - v)(l)| \\ &\leqslant \| P(v'_\alpha) - l \| + |(v_\alpha - v)(l)|, \end{aligned}$$

ce qui montre que $v_\alpha(P(v'_\alpha))$ converge vers $v(l)$. Ainsi l'inégalité (iii) donne par passage à la limite l'inégalité suivante:

$$v(l - k) \geqslant 0; \qquad \forall k \in K.$$

Il existe par conséquent un élément $v$ de la sphère unité de $V$ tel que $v(v' - l) = G(v' - l, v' - l) = \| v' - l \|$ et $v(l - k) \geqslant 0$ pour tout $k$ de $K$. Ceci montre que $l$ est le point de $K$ qui réalise la meilleure approximation de $v'$. Ainsi $P(v') = l$ et l'application $P$ est donc continue pour la topologie faible de $V'$.

Ainsi pour tout opérateur de $V = l^p$, $1 \leqslant p < \infty$ dans $C(\Omega)$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$. En effet, pour $p = 1$ le résultat provient de [4] et pour $p \in ]1, \infty[$ ceci provient de ce qui précède. La situation est différente pour $V = L^p([0, 1])$; $p \in ]1, 2[ \cup ]2, \infty[$. En effet, dans ce cas, la projection de meilleure approximation sur un compact convexe n'est pas toujours faiblement continue sur les parties bornées, puisque J. Lambert [13, p. 48] a démontré que la projection de meilleure approximation sur un sousespace de dimension finie est faiblement discontinue.

Signalons que J. Mach a montré que tout opérateur de $l^p$, $1 < p < \infty$ dans $C(\Omega)$ admet une meilleure approximation compacte par des méthodes différentes de celles utilisées ici. D'autre part, pour tout espace de Banach $V$

tout opérateur de $\mathscr{L}[V, C_0(I)]$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}[V, C_0(I)]$. Ceci se démontre par des méthodes distinctes de celles utilisées ici comme on peut le voir en consultant [5].

## III. Approximation pour des opérateurs de rang fini

Il s'agit, pour un entier $n$ donné et pour un opérateur $T$ de $\mathscr{L}[V, W]$ de trouver un opérateur $S$ dans l'ensemble $\mathscr{K}_n[V, W]$ des opérateurs de rang inférieur ou égal à $n$ tel que

$$\| T - S \| = \inf\{\| T - R \|; R \in \mathscr{K}_n[V, W]\}.$$

L'ensemble $\mathscr{K}_n[V, W]$ n'est pas un espace vectoriel mais un cône (ni convexe, ni saillant) fermé dans $\mathscr{L}[V, W]$. Si $V = L^1(\mu)$ on dira qu'un opérateur $S$ de $\mathscr{K}_n[V, W]$ est un *opérateur n-simple* s'il existe une famille $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ d'ensembles $\mu$-disjoints tels que $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ $\mu.p.p.$ et s'il existe une suite finie $(\omega_i)_{i=1,\dots,n}$ dans $W$ tels que

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{E_i} f\, d\mu\right) \omega_i \,;\ \forall f \in L^1(\mu).$$

On note $\mathscr{S}_n[L^1(\mu), W]$ le cône des opérateurs $n$-simples. Dans la suite on désigne par $s = (\omega_1 ,..., \omega_n)$ un point de l'espace produit $W^n$. Soit $B$ une partie bornée de $W$; on pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$R_n[B, W] = \inf\{\sup[d(x, s); x \in B]; s \in W^n\}.$$

Suivant [6] on dira qu'un point $s^* = (\tilde{\omega}_1 ,..., \tilde{\omega}_n)$ de $W^n$ est une *meilleure n-suite* pour l'ensemble $B$ si l'on a

$$R_n[B, W] = \sup[d(x, s^*); x \in B].$$

Il est clair que pour un sous-espace $M$ de $W$ on a

$$\tfrac{1}{2}R_n[B, W] \leqslant R_n[B, M] \leqslant R_n[B, W];$$
$$\alpha[B, W] = \inf\{R_n[B, W]; n \in N\}.$$

Dans la suite on écrira simplement $R_n[B]$, sans mention de l'espace considéré, si aucune confusion n'est à craindre.

Théorème 3.1. *Soit $T$ un opérateur de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ représentable par une fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$. Alors $Bg$ admet une meilleure n-suite si et seulement si l'opérateur $T$ admet une meilleure approximation dans le cône des opérateurs n-simples.*

*Démonstration.* Soit $s^* = (\tilde{\omega}_1, ..., \tilde{\omega}_n)$ une meilleure $n$-suite pour l'image essentielle $Bg$ de la fonction $g$ de $L^\infty(\mu, W)$ qui représente $T$. Soit $(B_1, ..., B_n)$ la partition de $Bg$ en ensembles boréliens considérée dans la preuve de la proposition 1.2. L'opérateur $S_0$ de $V = L^1(\mu)$ dans $W$ défini par

$$S_0(f) = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{E_i} f \, d\mu \right) \tilde{\omega}_i$$

où $E_i = g^{-1}(B_i)$ est l'opérateur $n$-simple recherché. En effet, si $S$ est un opérateur de $\mathscr{S}_n[L^1(\mu), W]$ défini par

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{E_i} f \, d\mu \right) \omega_i$$

on a les inégalités suivantes où l'on a posé $s = (\omega_1, ..., \omega_n)$

$$\begin{aligned} \| T - S \| = \left\| g - \sum_1^n \chi_{F_i} \omega_i \right\|_\infty &\geqslant \text{sup. ess. } [d(g(x), s); x \in X] \\ &= \sup[d(b, s); b \in Bg] \geqslant \sup[d(b, s^*); b \in Bg] \\ &= \| T - S_0 \| . \end{aligned}$$

Ce qui montre que $S_0$ est l'opérateur recherché et achève la démonstration de la première partie.

Inversement, si $T$ admet une meilleure approximation $S$ dans l'ensemble des opérateurs $n$-simples, l'opérateur $S$ étant défini par

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} \left( \int_{E_i} f \, d\mu \right) \omega_i ,$$

il s'agit de montrer que $s = (\omega_1, ..., \omega_n)$ est une meilleure $n$-suite pour l'ensemble $Bg$. Sinon, il existe une $n$-suite $s' = (\omega_1', ..., \omega_n')$ telle que

$$\sup[d(b, s'); b \in Bg] < \sup[d(b, s); b \in Bg].$$

Si $S'$ est l'opérateur $n$-simple associé à la suite $s'$ comme plus haut, il est aisé de vérifier que

$$\| T - S' \| = \sup[d(b, s'); b \in Bg] < \sup[d(b, s); b \in Bg] = \| T - S \|$$

ce qui montre que $S$ n'est pas une meilleure approximation de $T$ dans le cône des opérateurs $n$-simples et contredit l'hypothèse.

Les espaces de Banach $W$ tels que tous les ensembles bornés possèdent une meilleure $n$-suite, pour tout $n \geqslant 1$, sont étudiés dans [6]. Ici, ce qui nous intéresse sont les parties fermées qui sont des images essentielles de fonctions de $L^\infty(\mu, W)$. Ces parties sont évidemment séparables si l'on ne considère que des mesures bornées, par contre, si l'on admet les mesures non bornées toute partie fermée bornée est l'image essentielle d'une fonction de $L^\infty(\mu, W)$ pour une mesure $\mu$ adéquate. En tout cas, d'après [6] on a le résultat suivant:

PROPOSITION 3.2. *Soit $W$ un espace de Banach tel qu'il existe une projection 1-lipschitzienne de $W''$ sur $W$ (en particulier, si $W$ est un dual ou bien si $W = L^1(\mu)$). Alors pour tout entier $n$ il existe une meilleure approximation de $T$ dans le cône des opérateurs $n$-simples.*

Cette proposition ne constitue pas une caractérisation des espaces de Banach qui vérifient l'assertion précédente. En effet, d'après [6] tout borné de $W = C_0(\mathbb{N})$ possède pour tout $n$ une meilleure $n$-suite et pourtant il n'existe pas de projection 1-lipschitzienne de $l^\infty(\mathbb{N})$ sur $C_0(\mathbb{N})$. En ce qui concerne les mesures bornées on a l'analogue du Théorème 1.7. que nous donnons sans preuve.

THÉORÈME 3.3. *Soient $W$ un espace de Banach et $n \geqslant 1$; les assertions suivantes sont équivalentes*:

(a) *Toute partie fermée bornée séparable de $W$ admet une meilleure $n$-suite.*

(b) *Tout opérateur de $l^1(\mathbb{N})$ dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{S}_n[l^1(\mathbb{N}), W]$.*

(c) *Pour toute mesure bornée $\mu$ tout opérateur représentable de $L^1(\mu)$ dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{S}_n[L^1(\mu), W]$.*

(d) *Il existe une mesure bornée $\mu$ telle que $L^1(\mu)$ soit de dimension infinie et telle que tout opérateur représentable de $L^1(\mu)$ dans $W$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{S}_n[L^1(\mu), W]$.*

Nous nous tournons maintenant vers l'étude de la meilleure approximation des opérateurs représentables par des éléments de $\mathscr{K}_n[V, W]$ où $V = L^1(\mu)$; pour cela désignons par $\mathscr{H}_n$ l'ensemble des sous-espaces de $W$ de dimension inférieure à $n$. Posons pour une partie bornée $B$ de $W$

$$S_n[B, W] = \inf\{\sup[d(x, H); x \in B]; H \in \mathscr{H}_n\}.$$

Un sous-espace $\tilde{H}_n$ de $\mathscr{H}_n$ est dit une *meilleure $n$-section* de $B$ si l'on a

$$S_n[B, W] = \sup[d(x, H_n); x \in B].$$

Comme plus haut, on écrira simplement $S_n[B]$ sans mention de l'espace si aucune confusion n'est à craindre.

THÉORÈME 3.4. *Soient $T$ un opérateur représentable de $\mathscr{L}[L^1(\mu), W]$ et $n \geqslant 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe un opérateur $S_0$ de $\mathscr{K}_n[L^1(\mu), W]$ qui réalise la meilleure approximation de $T$.*

(b) *Il existe une meilleure $n$-section de l'image essentielle $Bg$ de la fonction $g$ qui représente $T$.*

*De plus, pour un tel opérateur $T$ on a $d(T, \mathscr{K}_n[V, W]) = S_n[Bg]$.*

*Démonstration.* (a) $\Rightarrow$ (b) Soient $S_0$ un opérateur qui vérifie l'hypothèse (a) et $H_n$ le sous-espace $S_0(L^1(\mu))$. Supposons que $H_n$ n'est pas une meilleure $n$-section, il existe donc un sous-espace $H$ de $W$ de dimension inférieure à $n$ tel que

$$S_n[Bg] \leqslant \sup[d(b, H); b \in Bg] < \sup[d(b, H_n); b \in Bg].$$

Soit $P_H$ la projection de meilleure approximation de $W$ sur le sous-espace $H$. Cette application multivoque prend ses valeurs dans l'ensemble des parties convexes non vides de $H$ puisque ce dernier est de dimension finie. Pour cette même raison d'ailleurs, $P_H$ est s.c.s. Le théorème de sélection de Kuratowski et Ryll–Nardzewski permet de construire une sélection borélienne $\varphi$. Soit $S$ l'opérateur représenté par $\varphi \circ g$ qui est une fonction de $L^\infty(\mu, H)$; cet opérateur est de rang fini et de plus son image est incluse dans $H$. D'autre part, on a les inégalités suivantes:

$$\| T - S \| = \sup[d(b, H); b \in Bg] < \sup[d(b, H_n); b \in Bg] \leqslant \| T - S_0 \|$$

ce qui contredit l'hypothèse sur $S_0$ et achève la démonstration de l'assertion.

(b) $\Rightarrow$ (a) Soient $H_n$ un sous-espace de dimension inférieure à $n$ qui est une meilleure $n$-section pour $Bg$, $S_0$ l'opérateur associé à l'espace $\tilde{H}_n$ construit comme plus haut, on a

$$\begin{aligned} \| T - S_0 \| = \| g - \varphi \circ g \|_\infty &= \text{sup. ess.}[\| g(x) - \varphi \circ g(x)\|; x \in X] \\ &= \sup[d(b, H_n); b \in Bg] = S_n[Bg]. \end{aligned}$$

D'autre part, si $S$ est un opérateur de rang inférieur à $n$ de $L^1(\mu)$ dans $W$ et si $H_n$ est l'image de $L^1(\mu)$ par $S$ on a

$$\begin{aligned} \| T - S \| &= \sup[\| T(f) - S(f)\|; f \in B(L^1(\mu))] \\ &\geqslant \sup[d(T(f), H_n);\ f \in B(L^1(\mu))]; \\ &S_n[T(B(V))] \geqslant S_n[Bg]. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait déjà remarqué que $\overline{T(B(V))}$ contient $Bg$. Ceci montre que $S_0$ est l'opérateur recherché. Cette preuve montre la dernière assertion du théorème à savoir que la distance de $T$ à l'ensemble $\mathscr{K}_n[L^1(\mu), W]$ est égale à $S_n[Bg]$.

PROPOSITION 3.5. *Soient $T$ un opérateur représentable de $\mathscr{L}[V, W]$ où $V = L^1(\mu)$ et $n \geqslant 1$. Alors $T(B(V))$ admet une meilleure $n$-section si et seulement si l'opérateur $T$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, W]$. De plus on a*

$$d(T, \mathscr{K}_n[V, W]) = S_n[T(B(V))].$$

*Démonstration.* Soit $\epsilon > 0$; il existe un opérateur $S$ de rang inférieur à $n$ défini sur $V$ et à valeurs dans $W$ tel que

$$\| T - S \| \leqslant d(T, \mathscr{K}_n[V, W]) + \epsilon.$$

D'après le théorème précédent on a

$$\begin{aligned} S_n[Bg] + \epsilon \geqslant \| T - S \| &= \sup[\| T(f) - S(f)\|; f \in B(L^1(\mu))] \\ &\geqslant \sup[d(T(f), S(V)); f \in B(L^1(\mu))]; \\ &\geqslant S_n[T(B(V))] \geqslant S_n[Bg], \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée. Supposons maintenant que $T(B(V))$ possède une meilleure $n$-section $H_n$ ; on a

$$\begin{gathered} S_n[Bg] \leqslant \sup[d(b, H_n); b \in Bg] \leqslant \sup[d(b, H_n); b \in T(B(V))] \\ S_n[T(B(V))] = S_n[Bg]. \end{gathered}$$

Ce qui montre que le sous-espace $H_n$ de $W$ est une meillaure $n$-section de l'ensemble $Bg$. En effet, la deuxième inégalité provient de l'inclusion $\overline{\text{conv}}[Bg \cup -Bg] \subset \overline{T(B(V))}$ et la dernière égalité provient de la deuxième assertion de la proposition. Maintenant en faisant appel au théorème précédent on voit que l'opérateur $T$ possède une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, W]$.

Inversement, si $T$ possède une meilleure approximation $S$ dans $\mathscr{K}_n[V, W]$ alors le sous-espace $S(V)$ est une meilleure $n$-section de $T(B(V))$. En effet, on a d'une part $d(T, \mathscr{K}_n[V, W]) = S_n[T(B(V))$. En effet, on a d'une part $\text{nt}_n[V, W]) = S_n[T(B(V))]$, et d'autre part

$$\begin{aligned} S_n[T(B(V))] &\leqslant \sup[d(T(f), S(V)); f \in B(V)] \\ &\leqslant \sup[\| T(f) - S(f)\|;\ f \in B(V)] = \| T - S \| \\ &= S_n[T(B(V))]; \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

En utilisant les deux résultats précédents il suffit, pour exhiber une classe d'espaces $W$ tels que tout opérateur représentable $T$ de $V = L^1(\mu)$ (resp. où $\mu$ est bornée) dans $W$ admette une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, W]$ d'exhiber une meilleure $n$-section. D'après [6] on a donc:

PROPOSITION 3.6. *Soit $W$ un espace de Banach tel qu'il existe une projection linéaire de norme 1 de $W''$ sur $W$ (en particulier si $W$ est un dual ou bien si $W = L^1(\nu)$) alors pour tout $n \geqslant 1$ il existe pour tout opérateur représentable de $\mathscr{L}[V, W]$ où $V = L^1(\mu)$ une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, W]$.*

En ce qui concerne les mesures bornées signalons un résultat analogue aux Théorèmes 1.7. et 3.3.; nous ne rappelons pas ce résultat pour ne pas alourdir le texte. En procédant par dualité comme dans la deuxième partie.

PROPOSITION 3.7. (a) *Soient $V$ un espace de Banach, $\Omega$ un compact et $n \geqslant 1$; alors pour tout opérateur $T$ de $V$ dans $C(\Omega)$ il existe un opérateur $S$ de $\mathscr{K}_n[V, B(\Omega)]$ tel que $\| T - S \| \leqslant d(T, \mathscr{K}_n[V, C(\Omega)])$. Si $\Omega$ est stonien on peut choisir $S$ dans $\mathscr{K}_n[V, C(\Omega)]$.*

(b) *Soient $V$ un espace de Banach dont le dual est strictement convexe, $\Omega$ un compact et $n \geqslant 1$; alors tout opérateur compact de $V$ dans $C(\Omega)$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, C(\Omega)]$.*

*Démonstration.* (a) Soit $\varphi$ la fonction continue de $\Omega$ dans $V'$ muni de $\sigma(V', V)$ qui est canoniquement associée à l'opérateur $T$. L'ensemble $\varphi(\Omega)$ possède une meilleure $n$-section $H_n$ d'après [6]. Soit $P$ la projection de meilleure approximation de $V'$ sur le sous-espace $H_n$ ; on a déjà vu que cette application admet une sélection borélienne $\theta$. L'opérateur $S$ défini par

$$S(v)(\omega) = \theta_0\varphi(\omega)(v); \qquad \forall\omega \in \Omega; \forall v \in V;$$

est l'opérateur recherché. En effet, pour tout $v$ de $V$ la fonction $S(v)$ est bornée sur $\Omega$ et de plus $S$ est de rang inférieur ou égal à $n$ puisque $\theta_0\varphi(\Omega)$ est inclus dans un sous-espace de $V'$ de dimension au plus égale à $n$. D'autre part, on a en posant $W = C(\Omega)$:

$$\| T - S \| \leqslant S_n[\varphi(\Omega)] \leqslant d(T', \mathscr{K}_n[W', V']) \leqslant d(T, \mathscr{K}_n[V, W]).$$

Si $\Omega$ est un compact stonien on achève la démonstration en utilisant le fait qu'il existe une projection $Q$ de norme 1 de $B(\Omega)$ sur $C(\Omega)$; en effet $Q \circ S$ est l'opérateur de $\mathscr{K}_n[V, C(\Omega)]$ qui constitue la meilleure approximation de $T$.

(b) On procède comme dans la première partie en utilisant toutefois les deux remarques suivantes. D'une part, la fonction $\varphi$ associée à $T$ est continue de $\Omega$ dans $V'$ muni de sa norme puisque $T$ est ici un opérateur compact. D'autre part, l'espace $V'$ étant strictement convexe et $H_n$ de dimension finie la projection de meilleure approximation $P$ de $V'$ sur $H_n$ est univoque et continue sur $V'$ muni de sa norme [13, p. 44]. Ainsi pour tout $v$

de $V$ la fonction $S(v) = \theta \circ \varphi(\omega)(v) = P \circ \varphi(\omega)(v)$ est continue sur $\Omega$; d'où le résultat.

Si les structures boréliennes de la sphère unité de $V'$ pour $\sigma(V', V)$ et pour la norme coïncident, ce qui est le cas en particulier si les topologies induites par $\sigma(V', V)$ et par la norme coïncident sur cet ensemble (c'est le cas si $V$ est uniformément lisse ou bien $V = C_0(\mathbb{N})$), alors l'opérateur $S$ construit dans la première partie de la proposition précédente, prend en fait ses valeurs dans $Bor(\Omega)$. D'autre part, si $V$ est réflexif on peut en faisant appel à [11] affirmer qu'il existe pour tout opérateur $T$ un $G_\delta$ dense $Z$ dans $\Omega$ tel que pour tout $v$ de $V$ la fonction $S(v)$ soit continue en chaque point de $Z$. De même, si $V$ est quelconque mais si l'opérateur $T$ est faiblement compact, on peut en utilisant [11] arriver au même résultat. La preuve de la proposition précédente permet de démontrer le résultat suivant:

THÉORÈME 3.8. *Soient $\Omega$ un compact et $V$ un espace de Banach réflexif lisse et strictement convexe. On suppose que l'application $v' \mapsto G(v', \cdot)$ est continue sur les parties bornées de $V'$ pour les topologies faibles de $V'$ et de $V$. Tout opérateur de $\mathscr{L}[V, C(\Omega)]$ admet une meilleure approximation dans $\mathscr{K}_n[V, C(\Omega)]$.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver, compte tenu des résultats précédents, que la projection de meilleure approximation $P$ de $V'$ sur un sous-espace $H$ de dimension finie est faiblement continue sur les parties bornées de $V'$. La preuve est similaire à celle du Théorème 2.4. et s'adapte facilement à partir de celle-ci. Soit $(v'_\alpha)$ une famille ultrafiltrée et bornée de $V'$ qui converge vers un point $v'$. Le point $P(v'_\alpha)$ est le point de $H$ qui est caractérisé par le fait qu'il existe $v_\alpha$ dans $V$ tel que

(i) $\| v_\alpha \| = 1$;

(ii) $v_\alpha(v'_\alpha - P(v'_\alpha)) = \| v'_\alpha - P(v'_\alpha)\|$;

(iii) $v_\alpha |_H = 0$.

Le point $v_\alpha$ coïncide avec $G(v'_\alpha - P(v'_\alpha), \cdot)$ et l'hypothèse sur $H$ implique que la famille $(P(v'_\alpha))$ converge pour la norme vers un point $l$ de $H$. L'hypothèse implique que la famille $(v_\alpha)$ converge faiblement vers $v = (v - l, \cdot)$. En passant à la limite dans les égalités (i), (ii), (iii) on voit que $l = P(v')$ et que $P$ est faiblement continue sur les parties bornées de $V'$. En fait, ce résultat est un cas particulier d'un théorème de Holmes [13, p. 48].

Signalons, encore une fois, que les espaces $V = l^p$, $1 < p < \infty$ vérifient l'hypothèse du théorème précédent. Cependant la situation est différente dans le cas des espaces $V = L^p(\nu)$; $p \in ]1, 2[ \cup ]2, \infty[$, où $\nu$ est une mesure bornée sans atome. En effet, d'après J. Lambert [13, p. 48] pour un tel espace $V$ la projection de meilleure approximation de $V'$ sur tout sous-espace de dimension finie est faiblement discontinue.

## BIBLIOGRAPHIE


1. F. BROWDER, Fixed point theorems for non linear semicontractive mappings, *Arch. Rational Mech. Anal.* **21** (1966), 259–269.
2. G. A. EDGAR, Measurability in Banach spaces, à paraître.
3. H. FAKHOURY, Projections de meilleure approximation continue dans certains espaces de Banach, *J. Math. Pures Appl.* **00** (1974), 1–16.
4. H. FAKHOURY, Approximation par des opérateurs compacts ou faiblement compacts à valeurs dans $C(X)$, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **27** (1977), 147–167.
5. H. FAKHOURY, Sur les $M$-idéaux dans certains espaces d'opérateurs, à paraître.
6. A. L. GARKAVI, The best possible net and the best possible cross-section of a set in a normed space, *Amer. Math. Soc. Transl.* **39** (1964), 111–132.
7. I. C. GOHBERG ET M. G. KREIN, "Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Amer. Math. Soc. Providence, R. I., 1969.
8. A. HENNFELD, A decomposition for $B(X)^*$ and unique Hahn–Banach extension, *Pacific J. Math.* **46** (1973), 197–199.
9. R. HOLMES ET B. KRIPKE, Best approximation by compact operators, *Indiana Math. J.* **21** (1971), 255–263.
10. J. MACH ET J. WARD, Approximation by compact operators on certain Banach spaces, *J. Approximation Theory* **23** (1978), 274–286.
11. I. NAMIOKA, Separate continuity and joint continuity, *Pacific J. Math.* **51** (1974), 515–531.
12. R. PHELPS, Some topological properties of support points of convex sets, *Israel J. Math.* **00** (1972), 327–336.
13. I. SINGER, "The Theory of Best Approximation and Functional Analysis," Reg. Conference Series in Appl. Math., No. 13, SIAM, Philadelphia, 1972.


*Printed in Belgium*